VISOKA TEHNIČKA ŠKOLA NIŠ

ПРОБНИ ТЕСТ из ***Математике***

1. Упростити израз:

$$\left(\frac{x}{y^2+xy}-\frac{2}{x+y}+\frac{y}{x^2+xy}\right):\left(\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}\right).$$

Решење:
Након растављања имениоца на просте чиниоце и свођења на НЗС, израз добија облик:

$$\left(\frac{x}{y(y+x)}-\frac{2}{x+y}+\frac{y}{x(x+y)}\right):\frac{x^2-2xy+y^2}{xy}=$$

$$=\frac{x^2-2xy+y^2}{xy\,(x+y)}\cdot\frac{xy}{x^2-2xy+y^2}=\frac{1}{x+y}\,,\quad x\neq 0,\ y\neq 0,\ x\neq\pm y\ .$$

2. Доказати идентитет:

$$\left(1+tgx+\frac{1}{\cos x}\right)\left(1+tgx-\frac{1}{\cos x}\right)=2tgx\ .$$

Решење:
Користећи образац за разлику квадрата и основне тригонометријске идентитете, добија се:

$$(1+tgx)^2-\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2=\left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\right)^2-\frac{1}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+2\sin x\cos x+\sin^2 x-1}{\cos^2 x}=\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}=2tgx\ .$$

3. Решити једначину:

$$\sqrt[x]{64}-5\sqrt[x]{2^{x+3}}+16=0\ .$$

Решење:
Трансформацијом једначине и увођењем смене, добија се:

$$2^{\frac{6}{x}} - 5\cdot 2^{\frac{x+3}{x}} + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(2^{\frac{3}{x}}\right)^2 - 5\cdot 2\cdot 2^{\frac{3}{x}} + 16 = 0,$$

смена: $2^{\frac{3}{x}} = \boldsymbol{t},\ \boldsymbol{t} > 0 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{t}^2 - 10\boldsymbol{t} + 16 = 0.$

За $\boldsymbol{t}_1 = 2 \ \Rightarrow\ 2^{\frac{3}{x}} = 2 \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{x}_1 = 3$ одн. $\boldsymbol{t}_2 = 8 \ \Rightarrow\ 2^{\frac{3}{x}} = 2^3 \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{x}_2 = 1.$

4. За које вредности променљиве $\boldsymbol{x}$ бројеви:

$$\boldsymbol{log}\,2,\ \ \boldsymbol{log}\left(2^x - 1\right),\ \ \boldsymbol{log}\left(2^x + 3\right)$$

представљају редом три узастопна члана аритметичког низа?

Решење:
Како се у аритметичком низу суседни чланови разликују за исту вредност, то је:

$$\boldsymbol{log}\left(2^x - 1\right) - \boldsymbol{log}\,2 = \boldsymbol{log}\left(2^x + 3\right) - \boldsymbol{log}\left(2^x - 1\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{log}\frac{2^x - 1}{2} = \boldsymbol{log}\frac{2^x + 3}{2^x - 1} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{2^x - 1}{2} = \frac{2^x + 3}{2^x - 1} \ \Leftrightarrow\ \left(2^x - 1\right)^2 = 2\left(2^x + 3\right) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \left(2^x\right)^2 - 4\cdot 2^x - 5 = 0$$

смена: $2^x = \boldsymbol{t},\ \boldsymbol{t} > 0,\ \Rightarrow\ \boldsymbol{t}^2 - 4\boldsymbol{t} - 5 = 0.$

За $\boldsymbol{t}_1 = -1,$ обзиром да је $\boldsymbol{t} < 0$ једначина нема решења.

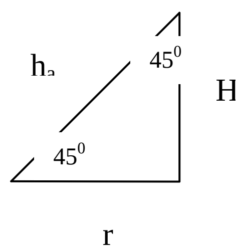
За $\boldsymbol{t}_2 = 5 \Rightarrow 2^x = 5 \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{log}_2 5$.

5. Основне ивице тростране пирамиде су 10, 10 и 12$\boldsymbol{cm}$. Израчунати површину и запремину пирамиде ако су бочне стране нагнуте према равни основе под углом од 45°.

Решење:
Како је основа једнакокраки троугао основице 12 и са крацима од 10$\boldsymbol{cm}$, то се Питагорином теоремом може израчунати висина троугла $\boldsymbol{h} = 8\boldsymbol{cm},$ па је површина троугла (базиса) $\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{h}}{2} = 48\boldsymbol{cm}^2$. Полуобим троугла је

$s = \frac{10+10+12}{2} = 16\boldsymbol{cm}$, а полупречник уписаног круга у троугао $\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{s}} = 3\boldsymbol{cm}$.

Бочне стране су под углом од 45° нагнуте према равни основе, па је карактеристичан правоугли троугао, са катетама H (висина пирамиде) и $\boldsymbol{r}$ (полупречник уписаног круга) и хипотенузом $\boldsymbol{h_a}$ (апотема), једнакокраки, тј. $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{r} = 3\boldsymbol{cm}$, $\boldsymbol{h_a} = 3\sqrt{2}\ \boldsymbol{cm}$.



$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{M} = 48 + \left(2 \cdot \frac{10 \cdot 3\sqrt{2}}{2} + \frac{12 \cdot 3\sqrt{2}}{2}\right) = 48\left(1+\sqrt{2}\right)\boldsymbol{cm}^2,$$

$$\boldsymbol{V} = \frac{1}{3}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} = \frac{1}{3} 48 \cdot 3 = 48\boldsymbol{cm}^3.$$